View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE

ZADACI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. prosinca 2017. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 3/271.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 72.

A) Zadatci iz matematike

3595. Riješi jednadžbu

$$\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4.$$

3596. Odredi sve realane brojeve p tako da nejednakost

$$-2<\frac{x^2+2px-2}{x^2-2x+2}<2$$

vrijedi za svaki realan broj x.

3597. Za pozitivne realne brojeve a, b, c, d dokaži nejednakost

$$\frac{a}{b+2c+3d}+\frac{b}{c+2d+3a}+\frac{c}{d+2a+3b}+\frac{d}{a+2b+3c}\geq\frac{2}{3}.$$

3598. Ako je $0<a<b<c$ pokaži da vrijedi

$$\log_a(\log_a b)+\log_b(\log_b c)+\log_c(\log_c a)>0.$$

3599. Ako jedna stranica kvadrata leži na pravcu $y=2x-17$, a druga dva vrha su na paraboli $y=x^2$, odredi njegovu minimalnu površinu.

3600. Dan je pravokutan trokut ABC s pravim kutom u vrhu C. Simetrale kutova $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle ABC$ sijeku stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ u točkama P i Q, tim redom. Neka su M i N nožišta okomica iz P i Q na $\overline{AB}$, tim redom. Koliki je kut $\sphericalangle MCN$?

3601. U trokutu ABC vrijedi $\sphericalangle BCA-\sphericalangle ABC=90^\circ$. Dokaži jednakost

$$\frac{1}{|AB|^2}+\frac{1}{|AC|^2}=\frac{1}{|AD|^2},$$

gdje je D nožište okomice iz vrha A na pravac BC.

3602. Konveksan četverokut $ABCD$ upisan je u polukružnicu k kojoj je $\overline{AB}$ dijametar. Pravci AC i BD sijeku se u točki E, a pravci AD i BC u F. Pravac EF siječe polukružnicu k u G i pravac AB u H. Dokaži da je E polovište dužine $\overline{GH}$ ako i samo ako je G polovište od $\overline{FH}$.

3603. Naka je α šiljasti kut romba $ABCD$ u vrhu A i φ kut pod kojim se iz polovišta stranice $\overline{AB}$ vidi nasuprotna stranica romba. Dokaži jednakost $4\sin\alpha=3\operatorname{tg}\varphi$.

3604. Pravac prolazi vrhom A kvadrata $ABCD$ i siječe stranicu $\overline{CD}$ u točki E te pravac BC u F. Dokaži jednakost

$$\frac{1}{|AE|^2}+\frac{1}{|AF|^2}=\frac{1}{|AB|^2}.$$

3605. Riješi diofantsku jednažbu

$$63x+70y+75z=91.$$

3606. Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$\binom{2n+1}{0}+\binom{2n+1}{1}+\ldots+\binom{2n+1}{n}=4^n.$$

3607. Nađi maksimum funkcije

$$f(x)=3\sin\left(x+\frac{\pi}{9}\right)+5\sin\left(x+\frac{4\pi}{9}\right)$$

na skupu realnih brojeva.

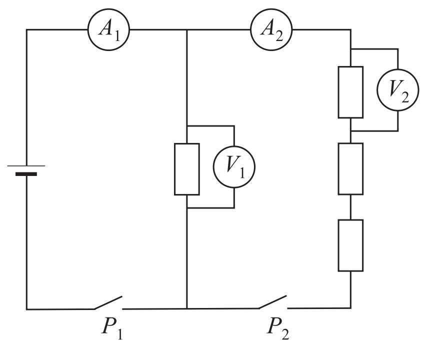
3608. Dan je kružni isječak $O\overset{\frown}{AB}$ polumjera R i vršnog kuta $\alpha<\pi$ radijana. Odredi visinu jednakokračnog trokuta OA_1B_1, gdje je $A_1\in\overline{OA}$ i $B_1\in\overline{OB}$ tako da je njegova površina jednaka polovini površine isječka.

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 426. Majstor Stjepan je otišao u trgovinu po zidne pločice za kupaonicu koju obnavlja. U trgovini nije mogao naći papir na koji je zapisao dimenzije zidova. Pomoglo mu je kad se sjetio da je na pod kupanice po duljini postavljao 12, a po širini 8 kvadratnih pločica brida 30 centimetara. Znao je i da je zid kupanice visok 2.8 metara. Na zidove treba postaviti pločice dugačke 40, a široke 30 centimetara. Koliko je takvih pločica majstor kupio?

OŠ – 427. U kabinetu za fiziku su dvije metalne kocke iste veličine. Učenik za jednu zna da je od željeza. Nastavnica mu je zadala da pomoću ravnala i tablice s podacima o gustoćama različitih tvari odredi od kojeg je metala druga kocka. Učenik je uravnotežio ravnalo oslonjeno u sredini pomoću tih kocaka i pri tome izmjerio da je željezna kocka od oslonca udaljena 9.5 centimetara, a ona od nepoznatog metala 6.6 centimetara. Od kojeg je metala napravljena druga kocka? (*Uputa*: koristiti tablice s podacima o gustoćama tvari.)

OŠ – 428. Svi otpornici na shemi su jednaki. Napon izvora je 30 volta. Kad je zatvoren samo prekidač P_1 ampermetar A_1 mjeri struju od 600 miliampera. Koliko će pokazivati svi instrumenti kad se zatvori i drugi prekidač?



OŠ – 429. Traktor vuče prikolicu mase 1.1 tonu. Faktor trenja na terenu po kojem vozi je oko 0.1. Kolika je ukupna masa tereta koji se smije natovariti u prikolicu ako maksimalna vučna sila traktora iznosi 8000 njutna?

1651. Točkasti izotropni izvor svjetlosti je udaljen od zida 80 cm. Pomoću tanke konvergentne leće indeksa loma 1.55 na polovici udaljenosti između izvora i zida dobijemo oštru sliku. Koja je jačina leće? Ako je leća kružnog oblika, promjera 8 cm i zanemarive debljine na rubovima, kolika je debljina leće u sredini? Koliki se postotak svjetla izvora leća fokusira na zid?

1652. Pri nekoj temperaturi i tlaku, gustoća suhog zraka (0% vodene pare) iznosi $1.3\ \mathrm{kg/m^3}$. Kolika će biti gustoća pri istoj temperaturi i tlaku, ako zrak sadrži 3% vodene pare?

1653. Satelit se giba oko Zemlje po eliptičnoj putanji. U najbližoj točki (perigeju) nalazi se 6900 km udaljen od središta Zemlje i giba se brzinom $7.7\ \mathrm{km/s}$. Kolike su brzina i udaljenost u najdaljoj točki (apogeju)? Koliko je ophodno vrijeme satelita? Masa Zemlje je $5.98 \cdot 10^{24}$ kg.

1654. Tijelo iz stanja mirovanja na vrhu kosine nagiba 25° počinje ubrzavati prema dnu kosine. Nakon dna kosine, tijelo se nastavlja gibati horizontalno po istoj vrsti podloge i usporava do zaustavljanja. Koliki je koeficijent trenja (jednak na kosini i ravnom putu), ako je tijelo prevalilo 15% manji put po ravnome nego po kosini?

1655. U nekom trenutku proizvedeno je 10^{10} radioaktivnih jezgara istog izotopa. Jedan sat nakon toga, izmjerena je aktivnost 5000 Bq (raspada u sekundi). Odredi vrijeme poluraspada tog izotopa.

1656. U prostoriji temperature $20\,^\circ\mathrm{C}$ nalazi se metalna kugla radijusa 10 cm. Izvor topline u središtu kugle održava površinu kugle na stalnoj temperaturi $32\,^\circ\mathrm{C}$. Odredi snagu izvora topline uz pretpostavku da kugla dobiva i gubi toplinu s površine kao idealno crno tijelo.

1657. Na kuglicu A koja se giba brzinom 5 m/s nalijeće kuglica B pod kutom od 75° u odnosu na smjer kretanja kuglice A. Nakon elastičnog sudara, kuglica B se zaustavi, a kuglica A se nastavi gibati pod kutom 30° u odnosu na njen početni smjer. Koliki je omjer masa kuglica?

C) Rješenja iz matematike

3567. *Odredi sva cjelobrojna rješenja jednadžbe*

$$x(x+2) = y^2(y^2+1).$$

Rješenje. Ako je $y = 0$ onda je $x = -2$ ili $x = 0$. Pokazat ćemo da su sva rješenja

$$\{(x, y)\} \in \{(-2, 0), (0, 0)\}.$$

Pretpostavimo li $y \neq 0$ tada je

$$y^4 < y^4 + y^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 < y^4 + 2y^2 + 1.$$

Dakle $(y^2)^2 < (x+1)^2 < (y^2+1)^2$, što je nemoguće.

Zlatko Petolas (4),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3568. *Nađi sve proste brojeve oblika* $2^{2^n}+5$*, gdje je* n *nenegativan cijeli broj.*

Prvo rješenje. Za $n \geq 1$ imamo

$$\begin{aligned}(2^{2^n}-1)+6 &= (2^{2\cdot 2^{n-1}}-1)+6\\ &= [(2^{2^{n-1}})^2-1]+6\\ &= (2^{2^{n-1}}-1)(2^{2^{n-1}}+1)+6.\end{aligned}$$

Promatrajmo tri uzastopna broja:

$$2^{2^{n-1}}-1,\ 2^{2^{n-1}},\ 2^{2^{n-1}}+1.$$

Srednji član nije djeljiv s tri što znači da je njegov neposredni prethodnik ili neposredni sljedbenik djeljiv s tri. Zaključujemo da je

$$(2^{2^{n-1}}-1)(2^{2^{n-1}}+1)$$

djeljivo s tri, a kako je i 6 djeljivo s 3 dobiveni izraz je složen za $n \geq 1$.

Lana Kramar (1),
SŠ Zlatar, Zlatar

Drugo rješenje. Za $n=0$ je $2^{2^0}+5=7$ što je prost broj. Pokazat ćemo da je to jedini prost broj tog oblika tako da pokažemo metodom matematičke indukcije

$$2^{2^n} \equiv 1 \pmod 3, \quad n \geq 1.$$

Za $n=1$, $2^{2^1}=4 \equiv 1 \pmod 3$.

Pretpostavimo da za neki $n \geq 1$, $2^{2^n} \equiv 1 \pmod 3$. Množenjem obje strane ove kongruencije s 2^{2^n} dobivamo $2^{2^{n+1}} \equiv 2^{2^n} \pmod 3 \equiv 1 \pmod 3$. Po principu matematičke indukcije slijedi $2^{2^n} \equiv 1 \pmod 3$ za sve $n \in \mathbf{N} \implies 2^{2^n}+5 \equiv 0 \pmod 3$, za sve $n \in \mathbf{N}$.

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3569. *Riješi sustav linearnih jednadžbi*

$$\begin{aligned}4bcx+acy-2abz&=0\\ 5bcx+3acy-4abz&=-abc\\ 3bcx+2acy-abz&=4abc,\end{aligned}$$

gdje je $abc \neq 0$.

Rješenje. Dijeljenjem sve tri jednadžbe s abc i stavljajući $u=\dfrac{x}{a}$, $v=\dfrac{y}{b}$, $w=\dfrac{z}{c}$, sustav prelazi u ekvivalentni sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned}4u+v-2w&=0\\ 5u+3v-4w&=-1\\ 3u+2v-w&=4,\end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje $u=1$, $v=2$, $w=3$. Dakle $x=a$, $y=2b$, $z=3c$ je jedinstveno rješenje početnog sustava.

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3570. *Za koje pozitivne cijele brojeve* x *je broj* $x^2-14x-256$ *potpun kvadrat?*

Prvo rješenje. Diskriminanta kvadratne jednadžbe $x^2-14x-256=k^2$, $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ mora biti potpun kvadrat:

$$1220+4k^2=m^2. \qquad (*)$$

Odavde slijedi da je m paran broj. Dalje, iz $(*)$ slijedi

$$(m-2k)(m+2k)=1220=2^2\cdot 5\cdot 61.$$

Oba faktora lijeve strane su parna, dakle imamo mogućnosti, ili

$$\begin{aligned}m+2k&=122\\ m-2k&=10,\end{aligned} \quad \text{ili} \quad \begin{aligned}m+2k&=610\\ m-2k&=2.\end{aligned}$$

Iz prvog sustava slijedi $m=66$, $k=28$, a iz drugog $m=306$, $k=152$. Sada iz

$$x=\frac{14\pm m}{2}$$

dobivamo $x \in \{-146, -26, 40, 160\}$. Kako se traži $x \in \mathbf{N}$, $x=40$ i $x=160$ su traženi brojevi.

Zlatko Petolas (4), Zagreb

Drugo rješenje. Imamo:

$$\begin{aligned}x^2-14x-256 &= (x^2-14x+49)-305\\ &= k^2, \quad k \in \mathbf{Z}\end{aligned}$$

$$(x-7)^2-k^2=305$$

$$(x-k-7)(x+k-7)=305.$$

Desnu stranu možemo faktorizirati:

$$305=305\cdot 1$$

$$x-k-7=305, \quad x+k-7=1$$

$$k=-152, \quad x=160,$$

$$x-k-7=1, \quad x+k-7=305$$

$$k=152, \quad x=160;$$

$$305 = -305 \cdot (-1)$$

$$x - k - 7 = -305, \quad x + k - 7 = -1$$

$$k = 152, \quad x = -146 < 0,$$

$$x - k - 7 = -1, \quad x + k - 7 = -305$$

$$k = -152, \quad x = -146 < 0;$$

$$305 = 61 \cdot 5$$

$$x - k - 7 = 61, \quad x + k - 7 = 5$$

$$k = -28, \quad x = 40,$$

$$x - k - 7 = 5, \quad x + k - 7 = 61$$

$$k = 28, \quad x = 40;$$

$$305 = -61 \cdot (-5)$$

$$x - k - 7 = -61, \quad x + k - 7 = -5$$

$$k = 28, \quad x = -26 < 0,$$

$$x - k - 7 = -5, \quad x + k - 7 = -61$$

$$k = -28, \quad x = -26 < 0.$$

Tražena rješenja su $x \in \{160, 40\}$.

Lana Kramar (1), Zlatar

3571. *Neka je n cijeli broj veći od 2. Dokaži da je $n(n-1)^4 + 1$ složen broj.*

Rješenje.

$$\begin{aligned}
&n(n-1)^4+1\\
&= n(n-1)^4-n^3+n^3+1\\
&= n[(n-1)^4-n^2]+n^3+1\\
&= n[(n-1)^2-n][(n-1)^2+n]+(n+1)(n^2-n+1)\\
&= n(n^2-3n+1)(n^2-n+1)+(n+1)(n^2-n+1)\\
&= (n^2-n+1)[n(n^2-3n+1)+n+1].
\end{aligned}$$

Oba faktora u zadnjem izrazu, za $n > 2$, su prirodni brojevi veći od 1. Dakle $n(n-1)^4+1$ je složen broj.

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3572. *Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c = 1$. Dokaži nejednakost*

$$\left(\frac{1}{a^2} - 1\right)\left(\frac{1}{b^2} - 1\right)\left(\frac{1}{c^2} - 1\right) \geq 512.$$

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a^2} - 1 &= \frac{(a+b+c)^2 - a^2}{a^2}\\
&= \frac{b^2+c^2+ab+ab+ac+ac+bc+bc}{a^2}\\
&\geq \frac{8\sqrt[8]{a^4b^6c^6}}{a^2}.
\end{aligned}$$

Analogno

$$\frac{1}{b^2} - 1 \geq \frac{8\sqrt[8]{a^6b^4c^6}}{b^2},$$

$$\frac{1}{c^2} - 1 \geq \frac{8\sqrt[8]{a^6b^6c^4}}{c^2}.$$

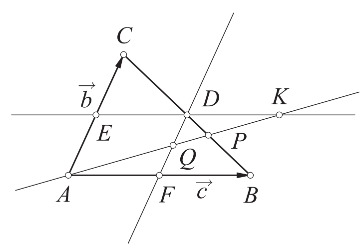
Množenjem ove tri nejednakosti slijedi tvrdnja.

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3573. *Točke D, E, F su polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC, a P je bilo koja točka na stranici $\overline{BC}$. Pravac AP siječe pravac FD u Q i DE u K. Dokaži da je $KC \parallel BQ$.*

Prvo rješenje. $\triangle AKE \sim \triangle QKD \implies \overline{QD} = \lambda\,\overrightarrow{AE} = \dfrac{\lambda}{2}\vec{b}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DK} &= \lambda\overrightarrow{EK} = \lambda(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DK})\\
&= \frac{\lambda}{2}\vec{c} + \lambda\overrightarrow{DK}\\
&\implies \overrightarrow{DK} = \frac{\lambda}{2(1-\lambda)}\vec{c}.
\end{aligned}$$



Sada je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CK} &= \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DK}\\
&= -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{\lambda}{2(1-\lambda)}\vec{c}\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\lambda}\vec{c} - \vec{b}\right).
\end{aligned}$$

Dalje,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QB} &= \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DB} = \frac{\lambda}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{c}) \\ &= \frac{1-\lambda}{2}\left(\frac{1}{1-\lambda}\vec{c} - \vec{b}\right) \\ &= (1-\lambda)\overrightarrow{CK}.\end{aligned}$$

Vektori $\overrightarrow{QB}$ i $\overrightarrow{CK}$ su kolinearni, dakle vrijedi tvrdnja zadatka.

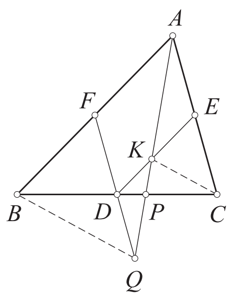
Zlatko Petolas (4), Zagreb

Drugo rješenje. Iz sličnosti trokuta DPQ i CPA imamo

$$\frac{|PQ|}{|PA|} = \frac{|PD|}{|PC|}. \qquad (1)$$

Također, iz sličnosti trokuta KPD i APB

$$\frac{|PA|}{|PK|} = \frac{|PB|}{|PD|}. \qquad (2)$$



Mnozenjem (1) i (2) imamo

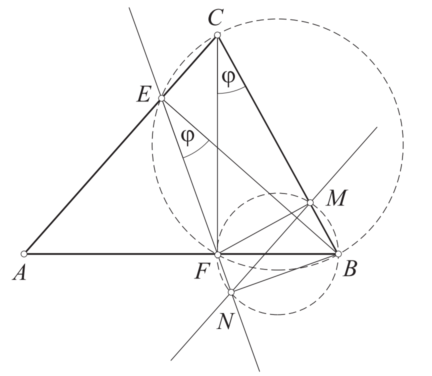
$$\frac{|PQ|}{|PK|} = \frac{|PB|}{|PC|}.$$

Kako je $\sphericalangle BPQ = \sphericalangle CPK$ trokuti BPQ i CPK su slični pa vrijedi $\sphericalangle PBQ = \sphericalangle PCK$. Dakle, $BQ \| KC$.

Ur.

3574. *U šiljastokutnom trokutu ABC su $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ visine, M je ortogonalna projekcija od F na BC i N ortogonalna projekcija od B na EF. Dokaži da je AC $\|$ MN.*

Rješenje. Neka je $\varphi = \sphericalangle BCF$. Točke B, C, E, F su na istoj kružnici. Isto tako su točke N, B, M, F su na istoj kružnici (zbroj nasuprotnih kutova je 180°).



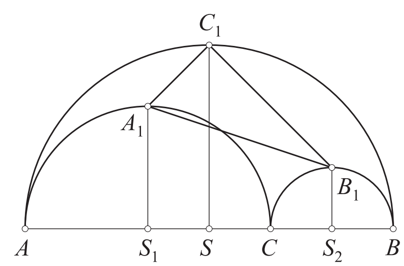
Iz $\triangle BCF$ je $\beta + \varphi = 90^\circ$. Iz $\triangle FMB$ je $\sphericalangle BFM = \varphi$, što znači $\sphericalangle MNB = \varphi$ (obodni kutovi). Kako je $\sphericalangle BNF = 90^\circ$, imamo $\sphericalangle MNF = \beta$. Isto tako $\sphericalangle BEA = 90^\circ$ pa je $\sphericalangle FEA = \beta$. Dakle $AC \parallel MN$ jer oba ta pravca sijeku pravac FE s istim priklonim kutom.

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3575. *Na dužini $\overline{AB}$ dana je točka C i konstruirane su polukružnice s dijametrima $|AB|$, $|AC|$, $|BC|$ (s iste strane pravca AB). Nađi omjer površine lika sa zakrivljenim stranicama određenih tim polukružnicama i površine trokuta s vrhovima u polovištima tih triju polukružnica.*

Rješenje. Neka su središta polukružnica, redom, S, S_1, S_2, radijusa r, r_1, r_2 i $A_1B_1C_1$ zadani trokut. Očito vrijedi $r = r_1 + r_2$, pa je površina lika sa zakrivljenim stranicama:

$$P_1 = \frac{\pi}{2}[(r_1 + r_2)^2 - r_1^2 - r_2^2] = r_1 r_2 \pi.$$



Površinu trokuta $A_1B_1C_1$ ćemo izračunati dodavanjem i oduzimanjem površina odgovarajućih trapeza:

$$\begin{aligned}P_2 &= P_{\triangle A_1B_1C_1}\\ &= P_{S_1SC_1A_1} + P_{SS_2B_1C_1} - P_{S_1S_2B_1A_1}\\ &= (r-r_1)\frac{r+r_1}{2} + (r-r_2)\frac{r+r_2}{2}\\ &\quad - (2r-r_1-r_2)\frac{r_1+r_2}{2}\\ &= r_2\frac{2r_1+r_2}{2} + r_1\frac{2r_2+r_1}{2} - \frac{(r_1+r_2)^2}{2}\\ &= r_1r_2.\end{aligned}$$

Dakle, traženi omjer je

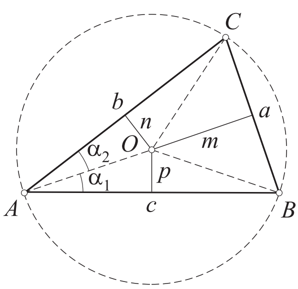
$$\frac{P_1}{P_2} = \pi.$$

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3576. *Duljine stranica šiljastokutnog trokuta su* a, b *i* c. *Udaljenosti središta trokutu opisane kružnice od tih stranica su redom* m, n *i* p. *Dokaži jednakost*

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p} = \frac{abc}{4mnp}.$$

Prvo rješenje. Površine trokuta BCO, CAO, ABO označimo, redom, P_1, P_2, P_3. Očito je $P_1 + P_2 + P_3 = P_{\triangle ABC} = \dfrac{abc}{4R}$.



Nadalje, sa slike imamo

$$\operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\alpha_2 = \frac{c}{2p} + \frac{b}{2n}.$$

S druge strane

$$\operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\alpha_2 = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2} = \frac{\frac{a}{2R}}{\frac{p}{R}\cdot\frac{n}{R}} = \frac{\frac{aR}{2}}{np} = \frac{\frac{amR}{2}}{mnp} = \frac{P_1R}{mnp}.$$

Dakle

$$\frac{P_1R}{mnp} = \frac{c}{2p} + \frac{b}{2n}. \qquad (1)$$

Posve analogno

$$\frac{P_2R}{mnp} = \frac{c}{2p} + \frac{a}{2m}, \qquad (2)$$

$$\frac{P_3R}{mnp} = \frac{a}{2m} + \frac{b}{2n}. \qquad (3)$$

Zbrajanjem (1), (2) i (3)

$$\frac{(P_1+P_2+P_3)R}{mnp} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p},$$

tj.

$$\frac{abc}{4mnp} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{c}{p}.$$

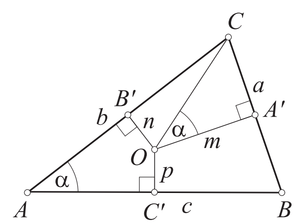
Zlatko Petolas (4), Zagreb

Drugo rješenje.

$$\sphericalangle COA' = \sphericalangle CAB = \alpha, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2m}$$

$$\sphericalangle AOB' = \sphericalangle ABC = \beta, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{2n}$$

$$\sphericalangle BOC' = \sphericalangle BCA = \lambda, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{c}{2p}$$



Jednakost se može zapisati u obliku

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Zato je dovoljno dokazati ovu trigonometrijsku jednakost. Iz

$$\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta - 1}$$

dobivamo

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$$

tj.

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Ur.

3577. *Ako kutovi* α, β, γ *trokuta zadovoljavaju relaciju*

$$\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\gamma = 1$$

dokaži da je jedan od njih jednak 120°.

Rješenje.

$$\begin{aligned}1 &= \cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos(3\pi - 3\alpha - 3\beta)\\ &= \cos 3\alpha + \cos 3\beta - \cos 3\alpha \cos 3\beta\\ &\quad + \sin 3\alpha \sin 3\beta\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}&1 - \cos 3\alpha - \cos 3\beta + \cos 3\alpha \cos 3\beta\\ &\quad = \sin 3\alpha \sin 3\beta\\ &\Longrightarrow (1-\cos 3\alpha)(1-\cos 3\beta) = \sin 3\alpha \sin 3\beta\\ &\Longrightarrow 4\sin^2\left(\tfrac{3\alpha}{2}\right)\sin^2\left(\tfrac{3\beta}{2}\right)\\ &\quad = 4\sin\left(\tfrac{3\alpha}{2}\right)\cos\left(\tfrac{3\alpha}{2}\right)\sin\left(\tfrac{3\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{3\beta}{2}\right)\\ &\Longrightarrow \sin\left(\tfrac{3\alpha}{2}\right)\sin\left(\tfrac{3\beta}{2}\right)\left[\cos\left(\tfrac{3\alpha}{2}\right)\cos\left(\tfrac{3\beta}{2}\right)\right.\\ &\quad \left.-\sin\left(\tfrac{3\alpha}{2}\right)\sin\left(\tfrac{3\beta}{2}\right)\right] = 0\\ &\Longrightarrow \sin\left(\tfrac{3\alpha}{2}\right)\sin\left(\tfrac{3\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{3(\alpha+\beta)}{2}\right) = 0\\ &\Longrightarrow \sin\left(\tfrac{3\alpha}{2}\right)\sin\left(\tfrac{3\beta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{3\gamma)}{2}\right) = 0.\end{aligned}$$

Ako je

$$\sin\left(\tfrac{3\alpha}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \alpha = \tfrac{2\pi}{3} = 120^\circ.$$

Analogno se pokazuje za $\sin\left(\frac{3\beta}{2}\right)$ i $\sin\left(\frac{3\gamma}{2}\right)$.

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3578. *Dokaži da je trokut ABC kod kojeg vrijedi*

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos^3\frac{\beta}{2} = \sin\frac{\beta}{2}\cos^3\frac{\alpha}{2}$$

jednakokračan.

Prvo rješenje. Dijeljenjem jednadžbe s $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$ dobivamo

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\cos^2\left(\tfrac{\beta}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\tfrac{\beta}{2}\right)\cos^2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\beta}{2}\right)} = \operatorname{tg}\left(\tfrac{\beta}{2}\right)\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

tj.

$$\operatorname{tg}^3\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}^3\left(\tfrac{\beta}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\tfrac{\beta}{2}\right) = 0$$

odnosno

$$\begin{aligned}&\left[\operatorname{tg}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\tfrac{\beta}{2}\right)\right]\\ &\cdot\left[\operatorname{tg}^2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\tfrac{\beta}{2}\right) + \operatorname{tg}^2\left(\tfrac{\beta}{2}\right) + 1\right] = 0.\end{aligned}$$

Izraz u drugim zagradama je kvadratni trinom po $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ čija je diskriminanta

$$D = -3\operatorname{tg}^2\left(\tfrac{\beta}{2}\right) - 4 < 0$$

pa je on strogo pozitivan. Zato je

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\tfrac{\beta}{2}\right) \quad \text{tj.} \quad \alpha = \beta.$$

Ur.

Drugo rješenje.

$$\begin{aligned}&\sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\cos^3\left(\tfrac{\beta}{2}\right) = \sin\left(\tfrac{\beta}{2}\right)\cos^3\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\\ &\Longrightarrow \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^3\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos^3\left(\frac{\beta}{2}\right)}\\ &\Longrightarrow \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}\\ &\Longrightarrow \operatorname{tg}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\right)\\ &\qquad = \operatorname{tg}\left(\tfrac{\beta}{2}\right)\left(1+\operatorname{tg}^2\left(\tfrac{\beta}{2}\right)\right)\\ &\Longrightarrow f\left(\operatorname{tg}\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\right) = f\left(\operatorname{tg}\left(\tfrac{\beta}{2}\right)\right),\end{aligned}$$

gdje $f(x) = x(1+x^2) = x + x^3$. Međutim $f'(x) = 1 + 3x^2 > 0$ tj. funkcija je strogo rastuća (injekcija) $\Longrightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) \Longrightarrow$ (tg je injekcija na $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$) $\Longrightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$ tj. $\alpha = \beta$.

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3579. *U konveksnom 21-terokutu nacrtane su sve njegove dijagonale. Dokaži da barem dvije od njih zatvaraju kut manji od 1°.*

Rješenje. Konveksni n-terokut ima $\dfrac{n(n-3)}{2}$ dijagonala. U našem slučaju to je 189 dijagonala. Napravimo pramen pravaca paralelnih s tim dijagonalama kroz neku fiksnu točku ravnine. Time je ravnina podijeljena na $2 \cdot 189 = 378$ isječaka i kutovi, koji čine ti isječci, sumirani daju 360°. Ako bi svaki od tih kutova bio veći od 1°, zbroj kutova bi bio veći od 378°. Kontradikcija!

Zlatko Petolas (4), Zagreb

3580. *Zadana je funkcija* $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ *sa svojstvima:*

a) $f(a+b) \geq f(a) + f(b)$, *za svake* $a, b \in \mathbf{Z}$;

b) $f(1) = 1$, $|f(-1)| = 1$.

Dokaži: $f(a) = a$ *za svaki* $a \in \mathbf{Z}$.

Rješenje. $f(2) = f(1+1) \geq 2f(1) = 2$ i induktivno $f(n) \geq n$, $n \in \mathbf{N}$.

$f(0) = f(0+0) \geq 2f(0) \implies f(0) \leq 0$.

Slijedi

$$0 \geq f(0) \geq f(1) + f(-1) \implies$$
$$f(-1) \leq -1 \implies f(-1) = -1.$$

Dakle,

$0 \geq f(0) \geq f(1) + f(-1) = 0 \implies f(0) = 0$.

Sada za $n \in \mathbf{N}$

$$0 = f(0) \geq f(n) + f(-n) \implies$$
$$f(-n) \leq -f(n) \leq -n,$$
$$f(-n) \geq nf(-1) = -n \implies f(-n) = -n,$$
$$0 = f(0) \geq f(n) + f(-n) = f(n) - n \implies$$
$$f(n) \leq n \implies f(n) = n.$$

Zlatko Petolas (4), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 418. *Automobil je 6 sekundi jednoliko ubrzavao pri čemu mu se početna brzina povećala 4 puta. Kolika je bila ta početna brzina ako mu je akceleracija iznosila* $4\ m/s^2$ *?*

Rješenje.

$\Delta t = 6$ s

$v = 4v_0$

$\underline{a = 4\ \mathrm{m/s^2}}$

$v_0 = ?$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{\Delta t} = \frac{4v_0 - v_0}{\Delta t} = \frac{3v_0}{\Delta t}$$

$$4\ \mathrm{m/s^2} = \frac{3v_0}{6\ \mathrm{s}}$$

$$3v_0 = 4\ \mathrm{m/s^2} \cdot 6\ \mathrm{s} = 24\ \mathrm{m/s}$$

$$v_0 = 8\ \mathrm{m/s}.$$

Početna brzina automobila bila je $8\ \mathrm{m/s}$.

Borna Cesarec (7), OŠ Augusta Cesarca, Krapina

OŠ – 419. *Voda je najgušća na* $4\,^\circ C$ *kad joj gustoća iznosi* $1000\ kg/m^3$. *Ako se litru vode zagrije za* $1\,^\circ C$ *njen će se volumen povećati približno za* $0.2\ cm^3$. *Kolika će biti gustoća litre vode početne temperature* $4\,^\circ C$ *nakon što ju se 10 minuta zagrijava grijačem snage 350 vata? Specifični toplinski kapacitet vode je* $4200\ J/kgK$.

Rješenje.

$t_1 = 4\,^\circ\mathrm{C}$

$\rho_1 = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$

$V_1 = 1\ \mathrm{L} = 1\ \mathrm{dm^3} = 0.001\ \mathrm{m^3}$

$\Delta t = 1\,^\circ\mathrm{C}$

$\Delta V = 0.2\ \mathrm{cm^3}$

$t = 10\ \mathrm{min} = 600\ \mathrm{s}$

$P = 350\ \mathrm{W}$

$\underline{c = 4200\ \mathrm{J/kgK}}$

$\rho_2 = ?$

$m = \rho_1 \cdot V_1 = 1000\ \mathrm{kg/m^3} \cdot 0.001\ \mathrm{m^3} = 1\ \mathrm{kg}$

$Q = P \cdot t = 350\ \mathrm{W} \cdot 600\ \mathrm{s} = 210\,000\ \mathrm{J}$

$Q = cm\Delta t = cm(t_2 - t_1)$

$$t_2 - t_1 = \frac{Q}{cm}$$

$$t_2 - 4\,^\circ\mathrm{C} = \frac{210\,000\ \mathrm{J}}{4200\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\,^\circ\mathrm{C}} \cdot 1\ \mathrm{kg}} = 50\,^\circ\mathrm{C}$$

$t_2 = 54\,^\circ\mathrm{C}$

$\Delta t = t_2 - t_1 = 54\,^\circ\mathrm{C} - 4\,^\circ\mathrm{C} = 50\,^\circ\mathrm{C}$

$$\Delta V_{50} = \frac{\Delta V}{\Delta t}\Delta t_1$$

$$\Delta V_{50} = 0.2\ \frac{\mathrm{cm^3}}{^\circ\mathrm{C}} \cdot 50\,^\circ\mathrm{C} = 10\ \mathrm{cm^3}$$

$$V_2 = V_1 + \Delta V_{50}$$
$$= 1000\ \mathrm{cm^3} + 10\ \mathrm{cm^3} = 1010\ \mathrm{cm^3}$$

$$\rho_2 = \frac{m}{V_2} = \frac{1\ \mathrm{kg}}{1010\ \mathrm{cm^3}} = \frac{1\ \mathrm{kg}}{0.00101\ \mathrm{m^3}}$$
$$= 990.1\ \mathrm{kg/m^3}.$$

Nakon zagrijavanja voda će imati gustoću $990.1\ \mathrm{kg/m^3}$.

Borna Cesarec (7), Krapina

OŠ – 420. *Periodi rotacije (okretanja oko svoje osi) na Zemlji i Marsu su približno jednaki pa smjene dana i noći na tim planetima traju oko 24 sata, na Marsu 37.5 minuta dulje. Usporedite njihove periode revolucije (okretanja oko Sunca) ako je prosječna brzina Zemlje oko Sunca 29.78 km/s, a Marsa 24.077 km/s. Prosječna udaljenost Zemlje od Sunca iznosi 149.6 milijuna kilometara, a Marsa 227.94 milijuna kilometara. Pretpostavite da su staze tih planeta kružnice. Periode revolucije izrazite u danima.*

Rješenje.

$T_Z = 24$ h

$T_M = 24$ h 37.5 min

$v_Z = 29.78$ km/s

$v_M = 24.077$ km/s

$R_Z = 149\,600\,000$ km

$\underline{R_M = 227\,940\,000 \text{ km}}$

Periodi revolucije =?

$$O_{p_Z} = 2 \cdot R_Z \cdot \pi = 2 \cdot 149\,600\,000 \cdot \pi \text{ km}$$

$$O_{p_M} = 2 \cdot R_M \cdot \pi = 2 \cdot 227\,940\,000 \cdot \pi \text{ km}$$

$$\begin{aligned} T_{r_Z} &= \frac{O_{p_Z}}{v_Z} = \frac{2 \cdot 149\,600\,000 \cdot \pi \text{ km}}{29.78 \text{ km/s}} \\ &= 31\,563\,617.26 \text{ s} \\ &= (31\,563\,617.26 : 86\,400) \text{ dana} \\ &= 365.32 \text{ dana} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{r_M} &= \frac{O_{p_M}}{v_M} = \frac{2 \cdot 227\,940\,000 \cdot \pi \text{ km}}{24.077 \text{ km/s}} \\ &= 59\,483\,708.89 \text{ s} \\ &= (59\,483\,708.89 : 86\,400) \text{ dana} \\ &= 688.47 \text{ dana.} \end{aligned}$$

Period revolucije Zemlje iznosi 365.32 dana, a period revolucije Marsa 688.47 dana.

Borna Cesarec (7), Krapina

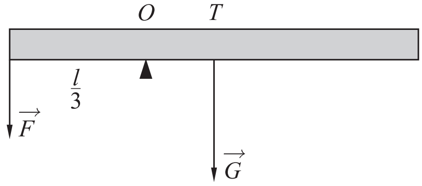
OŠ – 421. *Daska mase 45 kilograma ima oslonac točno na trećini svoje duljine. Koliku bi masu moralo imati dijete koje bi se, sjedeći na kraju daske, moglo samo ljuljati na njoj?*

Rješenje.

$m = 45$ kg (masa daske)

$k_1 = \dfrac{l}{3}$

$m_d = ?$



$$k_2 = \frac{l}{2} - \frac{l}{3} = \frac{l}{6}$$

$$G = mg = 45 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} = 450 \text{ N}$$

$$F \cdot k_1 = G \cdot k_2$$

$$F \cdot \frac{l}{3} = G \cdot \frac{l}{6} = 450 \text{ N} \cdot \frac{l}{6}$$

$$F = 225 \text{ N}$$

$$F = m \cdot g$$

$$m = \frac{F}{g} = \frac{225 \text{ N}}{10 \text{ N/kg}} = 22.5 \text{ kg.}$$

Dijete bi moralo imati masu 22.5 kg.

Borna Cesarec (7), Krapina

1637. *Žarišna daljina tanke konvergentne leće je 10% manja od udaljenosti predmeta od leće. Oštra realna slika nastaje na udaljenosti 40 cm od leće. Odredi jačinu leće.*

Rješenje. U jednadžbu leće

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

uvrstimo zadane uvjete. Oni glase:

$$f = 0.9a$$

$$b = 0.4 \text{ m.}$$

Uvrštavanjem i rješavanjem po a dobijemo:

$$\frac{1}{0.9a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{0.4},$$

$$a = \frac{1}{22.5} \text{ m.}$$

Te za jačinu leće dobijemo

$$J = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.9a} = +25 \text{ dpt.}$$

Ur.

1638. *Kamen možemo izbaciti kosim hicem, početnom brzinom 20 m/s. Metu koja se nalazi iznad mjesta izbačaja kamena možemo pogoditi s dva različita kuta izbačaja, takvim da vrijeme leta iznosi 1 s ili 3.5 s. Odredi tlocrtnu udaljenost mete, visinu mete i oba kuta izbačaja.*

Rješenje. U općeniti izraz jednadžbi kosog hica,

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) \cdot t$$
$$y(t) = v_0 \sin(\alpha) \cdot t - \frac{g}{2}t^2,$$

uvrstimo $v_0 = 20$, $x = d$, $y = h$, $t_1 = 1$ s za α_1 i $t_2 = 3.5$ s za α_2:

$$d = 20\cos(\alpha_1) \cdot 1$$
$$h = 20\sin(\alpha_1) \cdot 1 - \frac{g}{2} \cdot 1^2$$
$$d = 20\cos(\alpha_2) \cdot 3.5$$
$$h = 20\sin(\alpha_2) \cdot 3.5 - \frac{g}{2} \cdot 3.5^2.$$

Uvrstimo $g = 10$ m/s^2 i eliminiramo d i h:

$$\sin(\alpha_1) = 3.5\sin(\alpha_2) - 2.8125$$
$$\cos(\alpha_1) = 3.5\cos(\alpha_2).$$

Kvadriranjem i zbrajanjem ovih jednadžbi eliminiramo α_1:

$$1 = 3.5^2 - 19.6875\sin\alpha_2 + 7.910156.$$

Odatle je $\alpha_2 = 76.71°$, što dalje daje $\alpha_1 = 36.42°$. Uvrštavanjem u bilo koji od dva izraza za d i h dobivamo $d = 16.093$ m, $h = 6.874$ m.

Ur.

1639. *Dva unutarnja planeta, Merkur i Venera obiđu Sunce brže od Zemlje, s periodima $T_M = 0.2408$ godina i $T_V = 0.6152$ godine. Koristeći treći Keplerov zakon, odredi duljine poluosi putanja, te iz toga maksimalni kutni otklon od Sunca (gledano sa Zemlje), uz aproksimaciju kružnih putanja.*

Rješenje. Treći Keplerov zakon kaže da je omjer kubova poluosi putanja i kvadrata ophodnog vremena jednak za sve planete. Za Zemlju je po definiciji $T_Z = 1$ godina i $a_Z = 1$ a.j. Odatle izračunamo

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a_Z^3}{T_Z^2} = 1,$$

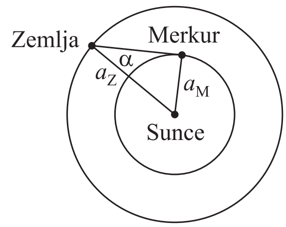
za Merkur je

$$a_M = (T_M)^{2/3} = 0.3871 \text{ a.j.},$$

a za Veneru

$$a_V = (T_V)^{2/3} = 0.7233 \text{ a.j.}$$

Kut maksimalnog otklona (α) odredimo iz pravokutnog trokuta na slici.



Vidimo da je

$$\sin(\alpha_M) = \frac{a_M}{a_Z} = 0.3871, \quad \alpha_M = 22.8°.$$

Analogno je za Veneru

$$\sin(\alpha_V) = \frac{a_V}{a_Z} = 0.7233, \quad \alpha_M = 46.3°.$$

Stvarni kutovi maksimalne elongacije ovise o varijaciji duljine radijvektora planeta oko duljine velike poluosi (tj. srednje vrijednosti) i uvijek su blizu dobivenog.

Ur.

1640. *Kuglica malih dimenzija, mase 0.5 kg obješena je na oprugu zanemarive mase, učvršćenu na strop gornjim krajem. Kuglicu rotiramo u horizontalnoj ravnini, tako da se duljina opruge ne mijenja. Vrtnja pri kutovima otklona 20° i 30° ima jednak period rotacije, iznosa 1.4 sekunde. Odredi duljinu opruge u oba slučaja, te konstantu elastičnosti opruge.*

Rješenje. Jednolika vrtnja kuglice daje izjednačavanjem komponenata sila (centrifugalne, gravitacijske i napetosti niti):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}, \qquad F = \frac{mg}{\cos\alpha}.$$

Iz druge jednadžbe dobijemo porast sile opruge, uz $g = 10$ m/s^2:

$$\Delta F = \frac{mg}{\cos 30°} - \frac{mg}{\cos 20°} = 0.4526 \text{ N}.$$

Prva nam jednadžba daje duljinu opruge za oba slučaja:

$$l\cos\alpha = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2,$$

za oba kuta dobijemo

$$l_1\cos 20^\circ = g\left(\frac{1.4}{2\pi}\right)^2$$

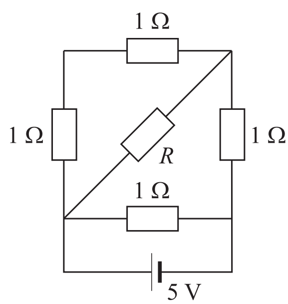
$$l_2\cos 30^\circ = g\left(\frac{1.4}{2\pi}\right)^2$$

što daje $l_1 = 0.5283$ m i $l_2 = 0.5733$ m. Konstanta opruge je

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta l} = \frac{0.4526}{0.0450} = 10.06 \text{ N/m}.$$

Ur.

1641. *Koliki otpor mora imati otpornik R u sredini sheme da bi kroz njega tekla struja 1.25 A? Kolika je tada ukupna struja iz izvora?*



Rješenje. Ako s U_R označimo napon na krajevima otpornika R, a s I_d struju kroz otpornik na desnom kraju sheme, imamo

$$U_R = 1.25R = (I_d - 1.25)\cdot(1+1)$$

$$\left(1.25 + \frac{I_d}{2}\right)\cdot 1 + I_d = 5 \text{ V}.$$

Odatle jednostavno dobijemo $I_d = 2.5$ A i $R = 2\ \Omega$. Ukupna struja je zbroj I_d i struje kroz donji otpornik na shemi, i iznosi

$$I = I_d + 1\Omega \cdot 5 \text{ V} = 7.5 \text{ A}.$$

Ur.

1642. *Na čavao zabijen u zid obješen je tanak metalni prsten radijusa 4 cm. Odredi period malih oscilacija prstena (oko čavla, u ravnini prstena) oko ravnotežnog položaja.*

Rješenje. Izraz za period malih oscilacija fizičkog njihala glasi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}},$$

gdje je d udaljenost težišta od objesišta, ovdje $d = R$, a I je moment tromosti oko objesišta, što za naš prsten iznosi prema poučku o paralelnim osima

$$I = I_0 + md^2 = mR^2 + md^2 = 2mR^2.$$

Uvrštavanjem dobijemo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} = 0.5674 \text{ s}.$$

Ur.

1643. *Za energiju nuklearne reakcije koriste se drugačije mjerne jedinice od energije kemijskih reakcija. Tako za fuzijsku reakciju imamo oslobođenu energiju Q po reakciji (u elektronvoltima):*

$$^2H + {}^3He \rightarrow {}^1H + {}^4He, \quad Q = 28\,295\,673 \ eV,$$

dok za gorenje metana imamo molarnu entalpiju S (po molu metana):

$$CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O, \quad S = 891 \ kJ/mol.$$

Odredi molarnu entalpiju nuklearne reakcije, a zatim Q-vrijednost kemijske reakcije. Koliki je omjer tih dviju energija (po reakciji ili po molu)?

Rješenje. Preračunamo Q vrijednost nuklearne reakcije u Joule $(1 \text{ eV} = 1.6\cdot 10^{-19} \text{ J})$, te pomnožimo s brojem čestica u molu, Avogadrovim brojem $(N_A = 6.022\cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1})$:

$$S_1 = 28\,295\,673 \cdot 1.6\cdot 10^{-19}\cdot 6.022\cdot 10^{23}$$
$$= 2.726\cdot 10^{12} \text{ J/mol}.$$

Molarnu entalpiju naprotiv dijelimo s obje konstante i dobijemo:

$$Q_2 = \frac{891\,000}{1.6}\cdot\frac{10^{-19}}{6.022}\cdot 10^{23}$$
$$= 9.247 \text{ eV}.$$

Oba omjera (po reakciji ili po molu) su jednaka i iznose

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{S}{S_2} = 3.06\cdot 10^6.$$

Dakle nuklearna reakcija (u ovom primjeru) daje tri milijuna puta veću energiju.

Ur.